به نام او

احتمال و کاربردها

۹۶/۸/۶

مسئله جمع آوری کوپن

N نوع کوپن متفاوت، هر بار یک نوع کوپن به تصادف (با جایگذاری)

تعداد کوپن‌های لازم برای داشتن همه N نوع کوپن. X

$\mathbb{P}(X < N) = 0$

$\mathbb{P}(X = K) = ?$ $\qquad K \geq N$

$\Omega = [N]^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots) \,;\, x_i \in [N]\}$

قرارداد: $[N] = \{1, \dots, N\}$ $\qquad A^B := \{f : B \to A\}$

$A \subset \Omega \qquad x_1, \dots, x_n$ ثابت

$$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots) ;\ y_i \in [N]\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{1}{N}\right)^n$$

$$\mathbb{P}(\{(x_1, x_2, \dots)\}) \leq \left(\frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \forall n$$

هدف

$$\mathbb{P}(X>K) = \binom{N}{1}\left(\frac{N-1}{N}\right)^K - \binom{N}{2}\left(\frac{N-2}{N}\right)^K + \cdots + (-1)^N \binom{N}{N-1}\left(\frac{1}{N}\right)^K$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (-1)^{i+1} \binom{N}{i}\left(1-\frac{i}{N}\right)^K$$

$$\mathbb{P}(X=K) = \mathbb{P}(X>K-1) - \mathbb{P}(X>K)$$

سوال دیگر. k کوپن تهیه کردیم. X: تعداد نوع کوپن های متفاوت در این k کوپن

$$\mathbb{P}(X=i) = ?$$

متغیر تصادفی گسسته

$$\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R}$$

چه مقدار شرط بندی روی X معقول است؟

$P_k = \mathbb{P}(X=k)$ k تومان جایزه $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{4} : \quad -100$

$\frac{1}{4} : \quad 20$

$\frac{1}{2} : \quad 50$

ورود معقول برای بازی < 50

برای حریف: $2 \quad -100$

$$\tfrac{1}{4} \times -100 + \tfrac{1}{4} \times 20 + \tfrac{1}{2} \times 50 = 5$$

$$\frac{-100+20+50}{3} \qquad -100\times \tfrac{1}{4} + 20 \times \tfrac{1}{4} + 50 \times \tfrac{1}{2}$$

N بار تکرار بازی

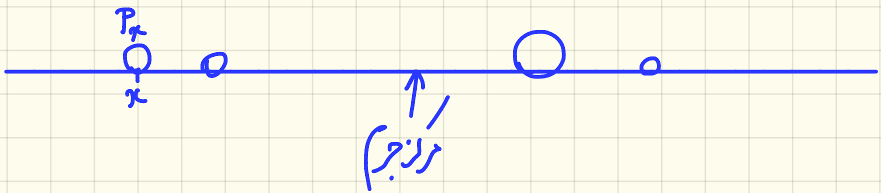
N: خیلی بزرگ

حدودا $N \times p_k$ بار: k

$$\text{متوسط برد در هر بازی} \simeq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{N p_k k}{N} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k k$$

امید ریاضی X ، میانگین X ، متوسط X

$$E[X] = \sum_x x\, p_x$$



مثال: پرتاب تاس:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = ۳٫۵$$

مثال:

$$A \subset \Omega$$

$$\mathbb{P}(A) = p$$

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & A \\ 0 & A^c \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\chi_A] = p \times 1 + (1-p) \times 0 = p$$

مثال: ۲ سوال

۱	۲
w_1	w_2
P_1	$> P_2$

استراتژی: انتخاب سوال‌ها به ترتیب احتمال برد.

0	$(1-P_1)$
w_1	$P_1(1-P_2)$
w_1+w_2	P_1P_2

در صورت انتخاب سوال 1 به عنوان سوال اول

X_i: میزان برد با سوال i به عنوان ~ ~

$$E[X_1] = P_1(1-P_2)\,w_1 + P_1P_2(w_1+w_2)$$

$$E[X_2] = P_2(1-P_1)\,w_2 + P_1P_2(w_1+w_2)$$

$$P_1(1-P_2)\,w_1 \qquad\qquad P_2(1-P_1)\,w_2$$

مثال:

۸:۳۰ صبح شنبه

طبقه سوم ساختمان ابن سینا

۳ کلاس

احتمال N_1 ۶۰ نفر

" N_2 ۴۰

" N_3 ۵۰

X

یک کلاس تصادفی

تعداد افراد حاضر

Y

یک نفر تصادفی

سر کلاس تو چند نفر؟

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

$$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} N_i \leq \sum_i \frac{N_i^2}{N_1+N_2+N_3}$$

$$X : \begin{cases} -1 & \frac{۱}{۴} \\ 0 & \frac{۱}{۴} \\ 1 & \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$E[\underbrace{X^{۲}}_{=Y}] = E[Y] = \frac{۳}{۴}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \frac{۳}{۴} \\ 0 & \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$Y = f(X) \qquad P(X=x) = P_x$$

$$E[X] = \sum x P_x$$

X مقادیرِ خود را در A میگیرد

$$E[Y] = \sum_y y\, P(Y=y) = \sum_{y \in f(A)} y\, \underbrace{P(Y=y)}_{\sum_{x \in f^{-1}(y)} P(X=x)}$$

$$f(A) = \{ f(x) \,;\, x \in A \}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \sum_{y\in f(A)} \sum_{x\in f^{-1}(y)} y\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$= \sum_{x\in A} \sum_{y=f(x)} y\, \mathbb{P}(X=x)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{x\in A} f(x)\, \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y} y\, \mathbb{P}(Y=y)$$

مثال قبل:

$$\mathbb{E}[X^{۲}] = \tfrac{۱}{۴}\times ۱ + \tfrac{۱}{۴}\times ۰ + \tfrac{۱}{۲}\times ۱ = \tfrac{۳}{۴}$$