به نام او

احتمال و کاربردها

۹۶/۸/۱۵

مثال:

$2n+1$ جزء

هر جزء با احتمال p کار می‌کند (مستقل از بقیه)

سیستم در حالت عملیاتی: حداقل $n+1$ جزء کار کند

$n=1$ بهتر است یا $n=2$؟ یعنی در کدام حالت احتمال در حالت عملیاتی بودن بالاتر است؟

X: تعداد اجزائی که کار می‌کند.

$X : \mathrm{Bino}(۵, p)$

$Y : \mathrm{Bino}(۳, p)$

$\mathbb{P}(X \geq ۳)$ $\qquad$ $\mathbb{P}(Y \geq ۲)$

$$\mathbb{P}(X \geq ۳) = \binom{۵}{۳} p^{۳}(۱-p)^{۲} + \binom{۵}{۴} p^{۴}(۱-p) + p^{۵}$$

$$= ۱۰\, p^{۳}(۱-p)^{۲} + ۵p^{۴}(۱-p) + p^{۵} = ۶p^{۵} - ۱۵p^{۴} + ۱۰p^{۳}$$

$$\mathbb{P}(Y \geq ۲) = \binom{۳}{۲} p^{۲}(۱-p) + \binom{۳}{۳} p^{۳} = ۳p^{۲}(۱-p) + p^{۳} = -۲p^{۳} + ۳p^{۲}$$

$$۶p^{۳} - ۱۵p^{۲} + ۱۰p > -۲p + ۳ \iff ۶p^{۳} - ۱۵p^{۲} + ۱۲p - ۳ \geq ۰$$

$$۳(p-۱)^{۲}(۲p-۱) > ۰ \iff p > ۱/۲$$

$$\mathbb{P}(X \geq ۳) = ۱ - \mathbb{P}(X \leq ۲) = ۱ - F_X(۲)$$

$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ یادآوری

$\mathbb{P}(X \leq t) \leq \mathbb{P}(X \leq S) \qquad t \leq S$

تابع توزیع * صعودی (غیرنزولی)

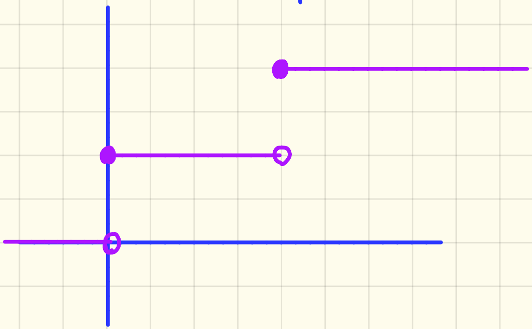
* $\lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} \mathbb{P}(X \leq t) = 0$

* $\lim_{t \to \infty} F(t) = ۱$

* F از راست پیوسته

$$X = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{cases}$$

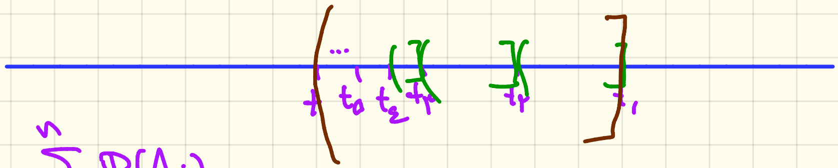
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \le t < 1 \\ 1 & 1 \le t \end{cases}$$



از راست پیوسته

$t_n \downarrow t$ $\qquad \lim_{n\to\infty} F(t_n) \stackrel{?}{=} F(t)$

$\lim_{n\to\infty} F(t_n)$



$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

$$A_i = \{ t_{i+1} < X \le t_i \} \qquad A = \{ X \le t \}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \qquad i \neq j$$

$$A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{ X \le t_1 \}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{F(t)} + \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = F(t_k)$$

$$F(t) + \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = F(t_k)$$

$$\lim_{k\to\infty} F(t_k) = \lim_{k\to\infty} F(t) + \underbrace{\sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} = F(t)$$

$t_n \uparrow t$ $\quad \mathbb{P}(X<t_n) \to \mathbb{P}(X<t)$ ✓

$\mathbb{P}(X\leq t_n) \not\to \mathbb{P}(X\leq t)$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} [i, i+1)$$

$$1 = \mathbb{P}(X\in\mathbb{R}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}[X\in[i,i+1)]$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{0} \mathbb{P}(X\in[i,i+1)) + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X\in[i,i+1))$$

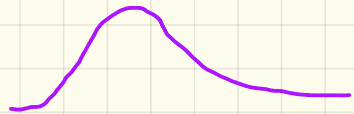
$$0 \leq \mathbb{P}(X\leq t) \leq \mathbb{P}(X\leq \lceil t\rceil)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\lceil t\rceil} \mathbb{P}(X\in (i-1,i]) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$$

بازگشت به متغیرِ دوجمله‌ای :

$\mathbb{P}(X=k)$ $\qquad X \sim \text{Bino}(n,p)$

$$\underset{k}{\operatorname{argmax}} \ \mathbb{P}(X=k) = \lceil p(n+1)-1 \rceil \simeq pn \qquad 0<p<1$$



$$\mathbb{P}(X=k+1) = \frac{p}{1-p}\,\frac{n-k}{k+1}\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$\mathbb{P}(X=k+1) \le \mathbb{P}(X=k) \iff \frac{p}{1-p}\,\frac{n-k}{k+1} \le 1$$

$$\iff np - \cancel{kp} \le k+1 - \cancel{kp} - p$$

$$p(n+1) \le k+1 \iff p(n+1)-1 \le k \ (*)$$

$\lceil p(n+1)-1 \rceil$ کوچکترین kای که رابطهٔ $(*)$ برقرار است

به طور خاص اگر pn صحیح باشد و $k=pn$ ماکزیمم $\mathbb{P}(X=k)$ است.

مثال: ایالت n نفر

در یک ایالت: انتخابات نزدیک بین ۲ نفر

دموکرات $\frac{1}{2}$

جمهوری‌خواه $\frac{1}{2}$

رأی من چه ارزشی دارد؟ متوسط وزن رأی من؟

$nc+2$

عدد ثابت

جمعیت رأی‌دهنده‌ها با من $2k+1=n$ نفر!

که همه ایالت

$$\binom{۲k}{k}\left(\frac{1}{۲}\right)^{۲k} = \frac{(۲k)!}{k!\,k!\times ۲^{۲k}} \simeq \frac{\left(\frac{۲k}{e}\right)^{۲k}\sqrt{۴\pi k}}{\left(\frac{k}{e}\right)^{۲k}۲\pi k\;۲^{۲k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

$$k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{۲\pi k}$$

$$\frac{nc+۲}{\sqrt{\pi k}} \simeq \frac{(۲k+1)c+۲}{\sqrt{\pi k}} \simeq \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\sqrt{k}\,c$$