به نام او

احتمال و کاربردها

۹۶/۹/۱۲

$X \sim N(\mu, \sigma^{۲})$ $\quad \sigma > 0$

$$P(X \leq \alpha) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{N(0,1)} \leq \frac{\alpha-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\Big)$$

مثال: $X \sim N(۳,۹)$

$P(۲<X<۵)$ $\qquad$ $P(|X-۳|>۶)$

$$= \underbrace{P(X<۵)}_{\Phi\left(\frac{۵-۳}{۳}\right)} - \underbrace{P(X \leq ۲)}_{\Phi\left(\frac{۲-۳}{۳}\right)}$$

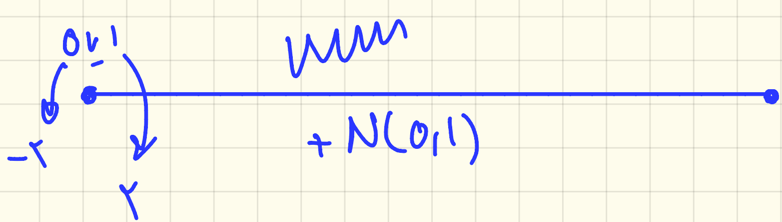
$۰,۶۷$ $\qquad$ $\underbrace{-۰,۳۳}$

$۰,۷۴۸۶ - (۱ - ۰,۶۲۹۳)$

$$\underbrace{P(X>۹)}_{۱-\Phi\left(\frac{۹-۳}{۳}\right) = \Phi(-۲)} + P(X<-۳)$$

$$\Phi\Big(\frac{-۳-۳}{۳}\Big) = \Phi(-۲)$$

مثال:



$$X = \begin{cases} -2 \\ 2 \end{cases} + N(0,1) = M \begin{cases} 0 & < 0.5 \\ 1 & > 0.5 \end{cases}$$

احتمال خطا؟ فرض کنید $\frac{2}{3}$ مواقع صفر ارسال می‌کنیم، $\frac{1}{3}$ مواقع ۱ ارسال می‌کنیم.

$$P(\text{خطا}) = P(\text{خطا} \mid 0)\underbrace{P(0)}_{2/3} + P(\text{خطا} \mid 1)\underbrace{P(1)}_{1/3}$$

$$P(\text{خطا} \mid 0) = P(-2 + N(0,1) > 0.5) = P(N(0,1) > 2.5) = 1 - \Phi(2.5)$$

$$P(\text{خطا} \mid 1) = P(2 + N(0,1) < 0.5) = P(N(0,1) < -1.5) = 1 - \Phi(1.5)$$

چرا نرمال مهم است؟

تقریب حدی دوموآر لاپلاس :

$Bino(n, \frac{1}{2})$ دوموآر

$X_n \sim Bino(n, p)$ لاپلاس

$$P(X_n \leq a) \longrightarrow \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

بهتر

$$P\left(b \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq a\right) \longrightarrow \Phi(a) - \Phi(b)$$

پواسون n بزرگ

np کوچک ≤ ۲۰

نرمال $np(1-p) \geq 10$ بزرگ

مثال. سکه سالم : ۴۰ بار پرتاب

X: تعداد شیرها؟

$$\mathbb{P}(X \leq ۲۰) = \sum_{i=0}^{۲۰} \binom{۴۰}{i} (۱/۲)^{۴۰}$$

$$\mathbb{P}(X < ۲۱)$$

$$\mathbb{P}(X < ۲۰٫۵) \sim \sum_{i=0}^{۲۰} e^{-۲۰} \frac{۲۰^{i}}{i!}$$

$$\sim \Phi\left(\frac{۲۰-۲۰}{\sqrt{۴۰ \times ۱/۴}}\right) \qquad \Phi\left(\frac{۲۱-۲۰}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

$$\mathbb{P}(X = ۲۰) \sim \Phi\left(\frac{۲۰٫۵-۲۰}{\sqrt{۱۰}}\right) - \Phi\left(\frac{۱۹٫۵-۲۰}{\sqrt{۱۰}}\right)$$

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(n - ۰٫۵ < X < n + ۰٫۵)$$

$$\leq n \qquad \leq n + ۰٫۵$$

مثال: هر سال ۱۵۰ دانشجو

امتحان ورودی

سوال: چند نفر قبولی اعلام کنم؟

معمولاً ۳۰ درصد قبولی‌ها ثبت نام می‌کنند

ماکزیمم $\mathbb{P}(X=150)$

بیش از ۹۵٪ $\mathbb{P}(X \leq 150)$

قبولی اعلامی N نفر

$X \sim \text{Bino}(N, 0.3)$

$$\mathbb{P}(X=150) = \binom{N}{150}(0.3)^{150} \times (0.7)^{N-150}$$

$$\Phi\left(\frac{X+0.5-150}{\sqrt{N \times 0.3 \times 0.7}}\right)$$

متغیر نمایی :

$X \sim Exp(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ x\le 0 & 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

بدون حافظه بودن

$$\frac{\bar F(s+t)}{\bar F(s)} \qquad \underbrace{P(X\ge s+t \mid X\ge s)} = P(X\ge t)\ \bar F(t) \qquad s,t\ge 0$$

$$\frac{P(X\ge s+t,\ X\ge s)}{P(X\ge s)} = \frac{1-F(s+t)}{1-F(s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

$P(X>t) = \bar F(t)$

$\ln(\bar F) = g$

$$\bar F(s+t) = \bar F(s)\,\bar F(t) \Rightarrow \ln(\bar F(t)) = \alpha t$$

$$g(s+t) = g(s) + g(t) \qquad \bar F(t) = e^{\alpha t}$$

قضیه : تنها متغیر پیوسته بدون حافظه متغیر نمایی است.

$X \sim Exp(\lambda)$

$$E[X] = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \underbrace{-x e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty}_{0} - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda$$

λ نرخ متغیر نمایی

$$E[X^2] = 1/\lambda^2$$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}\,dt \qquad \Gamma(n+1)=n!$$

متغیر گاما:

$$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$$\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$$ با جزء به جزء

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,dt=1$$

گزاره

$\Gamma(n,\lambda) \sim X_1 + \cdots + X_n$

X_i ها نمایی مستقل

$\Gamma(1,\lambda) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$E[\Gamma(\alpha,\lambda)] = \alpha/\lambda \qquad X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$

$$E[X^n] = \frac{1}{\lambda^n}\int_0^\infty \frac{\lambda^n t^n e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt = \frac{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt}{\lambda^n}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)}{\lambda^n} = \frac{(\alpha+n-1)\times\cdots\times\alpha}{\lambda^n}$$

$E[X] = \alpha/\lambda \qquad E[X^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} \qquad \mathrm{var}(X) = \alpha/\lambda^2$