به نام او

سیستم‌های دینامیکی

۹۵/۹/۲۸

فرایند مارکوف، ارگودیک بودن و آمیختگی

زنجیر مارکوف با ماتریس گذر P

P شرایط پرون فروبنیوس را دارد: $\exists\ \lambda>0 \quad \exists\ \pi=[\pi_1,\dots,\pi_n]$

$$\pi P = \lambda \pi \qquad (*)$$

اول همه π_i ها صفر نیستند. چون $\lambda\neq 0$. دقت کنید λ یک مقدار ویژه است. بنابراین می‌توان فرض کرد

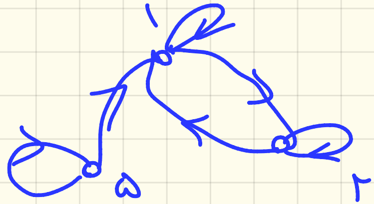
$\sum \pi_i = 1$

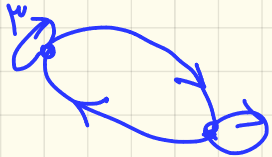
اگر جمع همه درایه‌های دو طرف (*) را در نظر بگیریم داریم:

$$\sum \pi_i = \sum_i \pi_i \underbrace{\sum_j P_{ij}}_{1} = \sum_j \sum_i \pi_i P_{ij} = \lambda \sum \pi_i$$

$\xRightarrow{\sum \pi_i \neq 0} \lambda = 1 \Rightarrow \exists$ بردار احتمال ناوردا برای P

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 1-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & c & 0 \\ 0 & 0 & d & 1-d & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1-e \end{pmatrix}$$





$\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}, 0, 0, 0\right)$ $\quad$ $\left(0, 0, \frac{d}{c+d}, \frac{c}{c+d}, 0\right)$

$(\alpha, \beta)\begin{pmatrix} 1-a, & a \\ b, & 1-b \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)$ $\quad$ $\alpha = \frac{b}{a+b}$ $\quad$ $\beta = \frac{a}{a+b}$

$\Rightarrow$

$-\alpha a + \beta b = 0 \Rightarrow \alpha a = \beta b \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{b}{a}$

$\alpha a + \; - \beta b = 0$

$$\Sigma = X^{\mathbb{N}} \quad (\text{یا } X^{\mathbb{Z}})$$

$$P \to \Sigma_P = \{ (x_n) \in \Sigma \ ; \ P_{x_n, x_{n+1}} > 0 \}$$

$\Sigma_i = (X \setminus \{i\})^{\mathbb{N}}$ (یا $(X \setminus \{i\})^{\mathbb{Z}}$) ، $\pi_i = 0$ و π بردار پایا

با محدود کردن دینامیک به اشتراک Σ_i هایی که $\pi_i = 0$ است می‌توان فرض کرد همهٔ درایه‌های π_j مثبت است.

Σ_P در Σ بسته است و اگر π یک توزیع پایا برای P باشد،

محمل اندازهٔ μ نظیر π دقیقاً Σ_P است.

$$(x_i^n) \xrightarrow{n \to \infty} (x_i^0) \Rightarrow \forall i \quad x_i^n \to x_i$$

$$\Rightarrow \exists N \quad n > N \quad x_i^n = x_i + x_{i+1}^n = x_{i+1}$$

π بردار احتمال پایا $\rightarrow \mu = \mu_\pi$

با درایه‌ها ناصفر

$$(x_i) \in \Sigma_P \Rightarrow \mu([m; x_m, \dots, x_n]) = \pi(x_m) P_{x_m, x_{m+1}} \times \dots \times P_{x_{n-1}, x_n} > 0$$

$$(x_i) \notin \Sigma_P \Rightarrow \mu([m; x_m, \dots, x_n]) = \pi(x_m) P_{x_m, x_{m+1}} \times \dots \times P_{x_{n-1}, x_n} = 0$$

✓ P: Stochastic Matrix $\Rightarrow$ P^n هم

✓ $\pi P = \pi \Rightarrow \pi P^n = \pi$

$H = \{(h_1, \dots, h_d) \; ; \; \sum h_i = 0\}$

ارگودیک بودن زنجیر مارکوف (شیفت مارکوف)

تعریف : زنجیر مارکوف را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه برای هر دو وضعیت i ، j ،

$\exists n : \; P^n_{i,j} > 0$

قضیه : (Σ, μ, σ) ارگودیک است $\Leftrightarrow$ تحویل ناپذیر باشد.

$\pi_i > 0$

$A = [m; a_m, \ldots, a_q]$ $\qquad$ $B = [r; b_r, \ldots, b_s]$

$r > q$

لم: $\mu(A \cap B) = \mu(A) \dfrac{\mu(B)}{\pi_{b_r}} P^{r-q}_{a_q, b_r}$

لم:

$\forall i \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} P^{l}_{ij} = \pi_j \iff$ P تحویل ناپذیر است

$\Rightarrow$ ✓

$A = [0;\, i] \quad B = [0;\, j] \quad \Leftarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\mu(A \cap \sigma^{-l}(B)) = \frac{1}{\pi_j}\mu(A)\mu(B)\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}P_{i,j}^{l}$$