به نام او

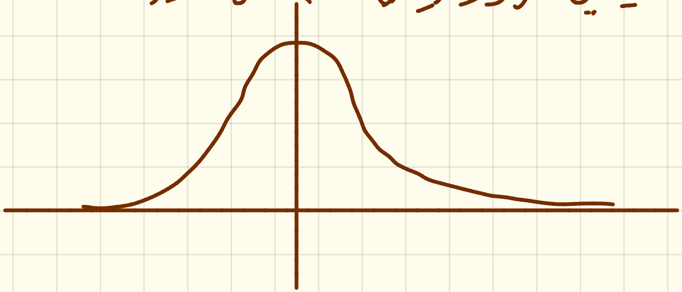
آمار و کاربرد

۹۵/۸/۰۲

توزیع نرمال، دو متغیر تصادفی

توزیع نرمال : $Z : N(0,1)$

میانگین صفر و واریانس 1 $\Leftarrow$ انحراف معیار 1



متغیر تصادفی : حروف بزرگ

مقادیر یا تحقق ها : حروف کوچک

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$F(Z \le t) = 1 - F(Z \le -t)$$

$$E[a+bZ] = a \qquad var(a+bZ) = b^2$$

X

$$E[a+bX] = a + bE[X]$$

$$var(a+bX) = b^2 \, var X$$

$$\sigma_{a+bX} = |b| \, \sigma_X$$

گسسته

تابع احتمال $P(X=t)$

تابع توزیع $P(X \le t) = F_X(t)$

مجموعه مقادیر قابل اختیار برای X : A

$$E[X] = \sum_{i \in A} P(X=i) \, i$$

$$E[X^2] = \sum_{i \in A} P(X=i) \, i^2$$

$$E[g(X)] = \sum_{x \in A} g(x) P(X=x)$$

پیوسته

تابع چگالی احتمال $f_X(t)$

تابع توزیع

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) dx$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \, f(x) dx$$

X $\qquad$ $g(X)$ $\qquad$ A مقادیر ممکن X

B مقادیر ممکن $g(X)$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{y \in B} y \, \underbrace{\mathbb{P}(g(X) = y)} = \sum_{y \in B} \sum_{t \in g^{-1}(y)} y \, \mathbb{P}(X = t)$$

$$= \sum_{t \in A} g(t) \, \mathbb{P}(X = t)$$

$W \quad H$

$$\mathbb{P}[\ F(W,H) \in A\ ] < 0{,}1$$

توزیع توأم

X, Y ازهم مستقل هستند اگر

$$\forall t,s \quad \mathbb{P}(X \leq t \mid Y \leq s) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

در غیر این صورت X و Y را وابسته گوییم

تابع احتمال توأم

$$\mathbb{P}(X = x,\ Y = y)$$

$$f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\mathbb{P}[X \leq t,\ Y \leq S] = F(S,t)$$

$$\mathbb{P}(X \le Y) = \sum_{\substack{x \in A_X \\ y \in A_Y \\ x \le y}} p(x,y) \qquad p(x,y) = p_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$\mathbb{P}[(X,Y) \in B] = \sum_{\substack{x \in A_X \\ y \in A_Y \\ (x,y) \in B}} p(x,y) \qquad \int_{(x,y)\in A} f(x,y)\,dx\,dy$$

$g(X,Y)$

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum g(x,y)\, p(x,y)$$

تعریف نیست!
قضیه است

$$'' \sum_{t} \mathbb{P}(g(X,Y)=t)\, t$$

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy$$

کوواریانس X, Y

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$
$$= \mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y$$

X,Y مستقل $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$

نکته: ممکن است $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ ولی X,Y مستقل نباشند

$$-1 \le \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \le 1$$

X,Y همبستگی

$\mathrm{cov}(X,Y) = \rho(X,Y) = 0$

X,Y ناهمبسته

$X = aY$

ترکیب خطی دو متغیر تصادفی

$$\mathbb{E}[aX+bY]$$
$$= a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$$

$$\operatorname{var}(aX+bY) = \mathbb{E}[(aX+bY)^2] - (a\mu_X + b\mu_Y)^2$$
$$= a^2\mathbb{E}[X^2] + b^2\mathbb{E}[Y^2] + 2ab\,\mathbb{E}[XY]$$
$$- a^2\mu_X^2 - b^2\mu_Y^2 - 2ab\,\mu_X\mu_Y$$
$$= a^2\operatorname{var}(X) + b^2\operatorname{var}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$$

مستقل یا ناهمبسته : $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$