به نام او

آمار و کاربرد

۹۵/۸/۲۳

بازه‌ی اطمینان

مثال: θ : متوسط قد دانشجویان دانشگاه

θ مقدار ثابت واقعی

$\hat{\theta} \leftarrow S_1, \dots, S_n$

۱۷۱ cm

$\hat{\theta}$ تصادفی

برآورد یا تخمین یک کمیت ← تخمین میزان خطا

I بازه‌ای حول $\hat{\theta}$ با احتمال زیادی θ در بازه‌ی I است.

دقت در محاسبه‌ی کمیت عددی

میزان قطعیت دقت

چگونه بازهٔ اطمینان بسازیم:

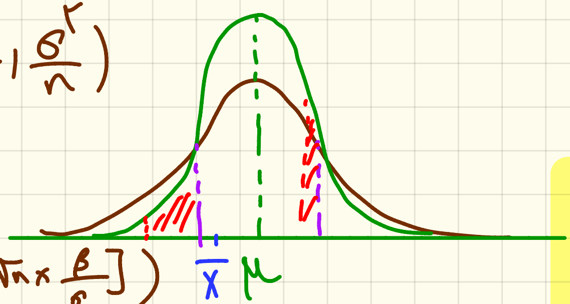
مثال روشن‌تر: متغیر نرمال $\quad N(\mu, \sigma^2)$

هدف: تخمین μ $\quad$ فرض می‌کنیم σ^2 را می‌دانیم.

برآوردگر μ: $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

$$\boxed{N(\mu, \sigma^2)} \longrightarrow X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$\Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$



$$\mathbb{P}\left(\bar{X} \in [\mu - \alpha, \mu + \beta]\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \in \left[\sqrt{n} \times \frac{-\alpha}{\sigma}, \sqrt{n} \times \frac{\beta}{\sigma}\right]\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\beta}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

با میزان قطعیت ثابت به دنبال کوچک‌ترین بازه هستیم

$$\alpha = \beta$$

$$\phi\left(\frac{\sqrt{n}\beta}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \phi\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \phi\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - 2\phi\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

به عنوان مثال برای قطعیت ۹۵٪ باید داشته باشیم

$$1 - 2\phi\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.95 \Rightarrow \phi\left(-\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.025$$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha\sqrt{n}}{\sigma} = Z_{0.025} \simeq -1.96$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1.96 \times \sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 SE$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bar{X} \in \left[\mu - \frac{\text{۱٫۹۶}\,\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + \frac{\text{۱٫۹۶}\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \text{۰٫۹۵}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\mu \in \underbrace{\left[\bar{X} - \frac{\text{۱٫۹۶}\,\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\text{۱٫۹۶}\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]}_{\text{یک بازه اطمینان ۹۵ درصد}}\right) = \text{۰٫۹۵}$$

$$\mathbb{P}(\bar{X} \in [\mu - \alpha, \infty)] = \text{۰٫۹۵}$$

واریانس کو؟!

$$\left[\bar{X} - \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{X} + \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\bar{X} - \overset{2.05}{1.96}\frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{X} + \overset{2.05}{1.96}\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

S^2: از نمونه بدست آمده است

توزیع t_ دانشجو با $n-1$ درجه آزادی

$n>120 \longrightarrow$ نرمال استاندارد

$$\left[\bar{X} - t_{0.025, n}\frac{S}{\sqrt{n}} , \bar{X} + t_{0.025, n}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

← فرض بر این است $\bar{X}$ مستقل از توزیع X نرمال است!

این فرض برای نمونه با n های بیش از ۴۰ و توزیع های معقول است!

گام بعدی: برای توزیع های دیگر از فرض بالا استفاده می کنیم.

$$\bar{X} \pm t_{0.025,n} \frac{S}{\sqrt{n}}$$